Curs 2 - Subspații vectoriale. Sisteme de generatori.

Oana Constantinescu, Lucian Maticiuc

1 Subspații vectoriale

Definiţia 1 *Fie $(V, +, \cdot)$ un K spațiu vectorial. O submulţime nevidă $V' \subset V$ se numește* ***subspaţiu vectorial*** *(sau subspațiu liniar) al lui V dacă restricțiile operațiilor $+$ și $\cdot$ la $V' \times V'$, respectiv la $K \times V'$, conferă lui V' o structură de K spațiu vectorial.*

Notăm $V' \underset{s.v.}{\subset} V$ sau $V' \underset{s.l.}{\subset} V$.

Teorema 2 *O submulţime $V' \subset V$ este un subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă avem:*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V', \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V'. \tag{1}$$

Demonstra. *Necesitatea ("$\Rightarrow$")* Dacă $V' \subset V$ este un subspaţiu vectorial al lui V atunci restricția lui $+$ la $V' \times V'$ este o operație internă, adică $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V'$ rezultă că $\vec{u}+\vec{v} \in V'$. Analog, restricția lui $\cdot$ la $K \times V'$ e operație externă, deci $\forall \alpha \in K$, $\forall \vec{u} \in V'$, rezultă că $\alpha\vec{u} \in V'$. Atunci, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V', \forall \alpha, \beta \in K$, avem $\alpha\vec{u} \in V'$ și $\beta\vec{v} \in V'$, deci și $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V'$.

Suficienţa ("$\Leftarrow$") Presupunem că are loc (1). Dacă alegem $\alpha = \beta = 1$ obţinem că $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V' \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V'$, deci restricția lui $+$ la $V' \times V'$ este o operație internă. Dacă alegem în (1) $\beta = 0$, obţinem că $\forall \alpha \in K$, $\forall \vec{u} \in V' \Rightarrow \alpha\vec{u} \in V'$. Deci restricția lui $\cdot$ la $K \times V'$ e operație externă. În plus, dacă alegem $\alpha = \beta = 0$ în (1) , obţinem că $\vec{0} \in V'$. Să demonstrăm că sunt verificate toate axiomele spaţiului vectorial pentru $+\,|_{V' \times V'}$ și $\cdot\,|_{K \times V'}$.

Mai întâi verificăm ca $(V', +\,|_{V' \times V'})$ este subgrup al lui $(V, +)$. Știm deja că $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V' \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V'$. Fie $\vec{v} \in V'$ arbitrar. Atunci, alegem $\alpha = -1$ în (1) și obținem $-\overrightarrow{v} = (-1)\overrightarrow{v} \in V'$. Deci $(V', +\,|_{V' \times V'})$ este subgrup al lui $(V, +)$.

În final, înmulțirea vectorilor din V cu scalari din K verifică cele patru axiome din definiția spațiului liniar. Atunci si $\cdot\,|_{K \times V'}$ verifică aceste axiome. Deci $(V', +\,|_{V' \times V'}, \cdot\,|_{K \times V'})$ este spațiu liniar.

■

Remarca 3 *Pentru caracterizarea unui subspaţiu vectorial relaţia (1) poate fi înlocuită, echivalent, cu*

$$(\forall \vec{u}, \vec{v} \in V' \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V') \left(\text{ şi } \forall \alpha \in K, \forall \vec{u} \in V' \Rightarrow \alpha\vec{u} \in V' \right). \tag{2}$$

Exemplul 4 *Submulţimea $\{\vec{0}\}$ a unui spaţiu vectorial este un subspaţiu vectorial. Îl numim subspațiul nul. Întreg spațiul vectorial este subspațiu vectorial al său.*

$\{\vec{0}\}$ și V se numesc subspații vectoriale improprii ale lui V. Toate subspațiile lui V diferite de $\{\vec{0}\}$ și V se numesc subspații proprii.

Exemplul 5 *Considerăm spaţiul vectorial aritmetic K^n. Atunci submulţimea sa*

$$V = \{\vec{u} \in K^n \mid \vec{u} = (0, u_2, u_3, \ldots, u_n)\,,\ u_2, u_3, \ldots, u_n \in K\} \subset K^n$$

este un subspaţiu vectorial. Într-adevăr, pentru orice $\vec{u}, \vec{v} \in V, \forall \alpha, \beta \in K$ avem că

$$\begin{aligned} \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} &= \alpha(0, u_2, u_3, \ldots, u_n) + \beta(0, v_2, v_3, \ldots, v_n) = (0, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n) + (0, \beta v_2, \ldots, \beta v_n) \\ &= (0, \alpha u_2 + \beta v_2, \ldots, \alpha u_n + \beta v_n) \in V. \end{aligned}$$

Exemplul 6 *Submulţimea $V' = \{\vec{u} \in K^n \mid \vec{u} = (1, u_2, u_3, \ldots, u_n), u_2, u_3, \ldots, u_n \in K\} \subset K^n$ nu este un subspaţiu vectorial. Într-adevăr, fie $\vec{u}, \vec{v} \in V'$. Avem că*

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (1, u_2, u_3, \ldots, u_n) + (1, v_2, v_3, \ldots, v_n) = \\ &= (2, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \notin V', \end{aligned}$$

deoarece $2 \neq 1$.

Exemplul 7 *Fie $\mathcal{M}_n(K)$ spaţiul vectorial al matricelor pătratice cu elemente din K. Atunci submulţimea sa $S_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid A = A^t\} \subset \mathcal{M}_n(K)$ (submulţimea matricelor simetrice) este un subspaţiu vectorial. Într-adevăr, pentru orice $A, B \in V, \forall \alpha, \beta \in K$ avem că*

$$(\alpha A + \beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B,$$

adică $\alpha A + \beta B$ este o matrice simetrică şi deci $\alpha A + \beta B \in V$.

Analog, se poate demonstra că $A_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid -A = A^t\} \subset \mathcal{M}_n(K)$ (submulţimea matricelor antisimetrice) este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_n(K)$.

Exemplul 8 *Mulțimea polinoamelor de grad cel mult n este subspațiu liniar al spațiului liniar al polinoamelor, cu coeficienți într-un câmp dat: $K_n[X] \underset{s.v.}{\subset} K[X]$, deoarece orice combinație liniară de două polinoame de grad cel mult n este un polinom de grad cel mult n.*

Exemplul 9 *$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ funcție continuă pe $\mathbb{R}\}$,*

$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ funcție derivabilă pe $\mathbb{R}\}$ sunt subspații vectoriale ale lui $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, deoarece orice combinație liniară de funcții continue (respectiv derivabile) este o funcție continuă (derivabilă).

Exemplul 10 *Considerăm un sistem omogen de m ecuații liniare, cu n necunoscute $x_1, \cdots, x_n$, scris matricial sub forma $AX = O$, unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e matricea sistemului, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Atunci, mulțimea soluțiilor S a acestui sistem este subspațiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$.*

Fie $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ două soluții arbitrare ale sistemului, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrari, X, Y matricele coloană $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Deci $AX = O$ și $AY = O$. Rezultă $A(\alpha X + \beta Y) = O$, deci $\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y}$ e soluție a sistemului dat.

Definiţia 11 *Fie $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ un sistem de $n \in \mathbb{N}^*$ vectori din spaţiul vectorial V. Spunem că vectorul $\vec{v} \in V$ este o* ***combinaţie liniară*** *de vectorii sistemului S dacă există n scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât are loc*

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n.$$

Teorema 12 *Fie $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p\}$. Mulţimea tuturor combinațiilor liniare ce se pot forma cu vectorii sistemului S este un subspaţiu vectorial al lui V.*

Demonstra. Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V$ doi vectori din V care se pot exprima ca niște combinaţii liniare de vectori din S,deci

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p \text{ şi } \vec{v} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \cdots + b_p\vec{v}_p\,.$$

Atunci $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \cdots = (\alpha a_1 + \beta b_1)\vec{v}_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2)\vec{v}_2 + \cdots + (\alpha a_p + \beta b_p)\vec{v}_p$, adică $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ este de asemenea o combinaţie liniară de vectori din S şi, aplicând caracterizarea dată de Teorema 2, obţinem concluzia. ■

Definiţia 13 *Vom nota cu $[S]$ mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de vectori din S,*

$$[S] := \{\vec{u} \in V : \vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha \vec{v}_p,\ \forall \alpha_1, ..., \alpha_p \in K\} \subseteq V.$$

*Acest spaţiu este, conform teoremei precedente, un subspaţiu vectorial şi se numeşte **subspaţiul vectorial generat** de submulţimea S (sau **înfășurătoarea liniară a lui** S). Spunem că vectorii $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p$ formează un **sistem de generatori** pentru $[S]$.*

Putem da o definiție similară și pentru cazul în care S nu este finită. Atunci $[S]$ este mulţimea tuturor combinaţiilor liniare **finite** de vectori din S și este subspațiu liniar al lui V.

2 Sisteme de generatori

Definiţia 14 *Fie V un K spațiu vectorial. Spunem că submulţimea (cu un număr finit de vectori) $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \subset V$ este un **sistem de generatori** al lui V dacă subspaţiul vectorial generat de S coincide cu V, adică*

$$[S] = V.$$

Deci orice vector din V se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori din S. În acest caz spunem că V este finit generat.

Exerciţiul 15 *În spaţiul vectorial aritmetic K^n , fie sistemul de vectori*

$$S = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1, \cdots, 0), ..., \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}.$$

(1 şi 0 sunt elementele neutre în câmpul K). Verificăm dacă S este un sistem de generatori pentru K^n.

Fie $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un vector arbitrar din K^n . Verificăm dacă există scalarii $\alpha_i \in K,\ i \in \overline{1, n}$ a.i.

$$\overrightarrow{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{e}_n \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 (1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2 (0, 1, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_n (0, \ldots, 1) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \Leftrightarrow$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \Leftrightarrow \alpha_i = x_i,\ \forall i \in I.$$

Deoarece există scalarii cu proprietatea cerută (chiar unici), S este un sistem de generatori pentru K^n.

Exerciţiul 16 *Studiaţi dacă următorul sistem de vectori din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$:*

$$S = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \vec{v}_2 = (1, -1, 1), \vec{v}_3 = (-1, 3, -1)\}.$$

Fie $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector arbitrar din $\mathbb{R}^3$. Verificăm dacă există scalarii reali $\alpha_i,\ i \in \overline{1, 3}$ a.i.

$$\overrightarrow{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)$$

care este echivalent cu rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = x_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = x_3 \end{cases}$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ *şi* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, *rezultă că rangul matricei sistemului este doi. Pentru ca sistemul să fie compatibil, este necesar și suficient ca minorul caracteristic să fie nul,* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(x_3 - x_1) = 0$. *Deci doar vectorii* $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$, *cu* $x_3 = x_1$, *pot fi generați de* S. *Rezultă că* S *nu este un sistem de generatori pentru* $\mathbb{R}^3$.

Exercițiul 17 *Evident* $S = \left\{1, X, X^2, \cdots, X^n\right\}$ *este sistem de generatori pentru* $K_n[X]$, *dar* $S^{'} = \left\{X, X^2, \cdots, X^n\right\}$ *nu generează pe* $K_n[X]$, *deoarece polinoamele de grad* 0 *nu se pot scrie ca niște combinații liniare de polinoamele lui* $S^{'}$.

Remarca 18 *Dacă* S *este sistem de generatori pentru* V *și* $S \subset S^{'}$, *(* S, S' *finite), atunci* $S^{'}$ *este sistem de generatori pentru* V.

Evident, orice vector din V *este o combinație liniară de vectorii lui* S, *la care adăugăm vectorii din* $S' \backslash S$ *înmulțiți cu* 0.

Deci e important să determinăm un sistem minimal de generatori pentru spațiul liniar V.

Teorema 19 *Fie* $\{V_i\}_{i \in I}$ *o mulțime de subspații liniare ale lui* V. *Atunci intersecția lor,* $\cap_{i \in I} V_i$, *este subspațiu liniar al lui* V .

Demonstra. *Fie* $\vec{u}, \vec{v} \in V$ *doi vectori arbitrari din* $\cap_{i \in} V_i$ *și* α, β *doi scalari arbitrari din* K.

Rezultă că $\vec{u}, \vec{v} \in V_i$, $\forall i \in I$. *Dar* V_i *e subspațiu liniar al lui* V, *pentru orice* $i \in I$, $\Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V_i$, $\forall i \in I \Leftrightarrow \alpha\vec{u} + \beta \in \cap_{i \in I} V_i$.

■

Remarca 20 *Se poate demonstra că subspațiul generat de* S *este intersecția tuturor subspațiilor vectoriale ale lui* V *care includ pe* S. *Deci* $[S]$ *este cel mai mic subspațiu liniar (în sensul incluziunii), care conține pe* S.

De adăugat demonstrația!!!

3 Exerciții

1. *Să se precizeze care din submulţimile de mai jos sunt subspații vectoriale ale lui* $\mathbb{R}^3$.

   (a) $S_1 = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

   (b) $S_2 = \{(x_1, x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

   (c) $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$;

   (d) $S_4 = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

   (e) $S_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + 3x_2 = 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$;

   (f) $S_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + 3x_2 = 1, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$;

   (g) $S_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 x_2 = 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$;

   (h) $S_8 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 > 0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

   Rezolvare:

   Trebuie să verificăm dacă prin orice combinaţie liniară cu elemente din submulţime, rămânem sau nu în submulţimea respectivă. Fie, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi* $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in S_i$, $i = \overline{1, 8}$, *arbitrari şi verificăm dacă* $\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y}$ *aparține sau nu lui* S_i, $i = \overline{1, 8}$.

Se va obţine că doar S_1, S_4 şi S_5 sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$.

2. *Care dintre următoarele submulţimi sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?*

   (a) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$;

   (b) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$;

   (c) $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$?

   Rezolvare:

   (a) *Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $A, A' \in S_1$arbitrare.*

   $$\alpha A + \beta A' = \alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & a' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \end{pmatrix} \in S_1,$$

   deci $S_1 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi* $A, A' \in S_2$,

   $$\alpha A + \beta A' = \alpha \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & a' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \end{pmatrix} \notin S_2,$$

   deoarece $2 \neq 1$, deci $S_2 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nu este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (c) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *şi* $A, A' \in S_3$,

   $$\alpha A + \beta A' = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \end{pmatrix} \in S_3,$$

   deci $S_3 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. *Să se arate că mulţimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

4. *Să se arate că mulţimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*

5. *Se dau vectorii $\vec{v}_1 = (1,2,-3,-1)$, $\vec{v}_2 = (0,-1,1,2)$, $\vec{v}_3 = (-2,0,1,3)$ şi $\vec{v}_4 = (-1,1,1,2)$ din $\mathbb{R}^4$. Să se arate că $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^4$.*

   Rezolvare:

Fie $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vector arbitrar din $\mathbb{R}^3$. Verificăm dacă există scalarii reali α_i, $i \in \overline{1,4}$ a.i.

$$\overrightarrow{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 + \alpha_4 \vec{v}_4 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_3 - \alpha_4 & = x_1, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 & = x_2, \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & = x_3, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 & = x_4. \end{cases}$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$, *avem un sistem Cramer compatibil determinat. Deci Vectorii formează un sistem de generatori pentru* $\mathbb{R}^4$.